Воркшоп по математическому моделированию и дифференциальным уравнениям, посвящен юбилею проф. А.О. Ватульяна

22-24 ноября 2023 г.

# Обзор недавних продвижений в математической гидродинамике

**А. Моргулис**
**ЮФУ, Ростов-на-Дону и ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ**

22 ноября 2023 г.

# Несжимаемая, идеальная и однородная жидкость

Уравнения Эйлера

$$\mathrm{v}_t + (\mathrm{v}, \nabla)\mathrm{v} = -\nabla P, \ \operatorname{div} \mathrm{v} = 0, \quad (EU)$$

Неизвестные: скорость $\boldsymbol{v}$ – векторное поле на $D$ (зависящее от времени), и давление $P$ – скаляр. В декартовых координатах $x_1, x_2, x_3$
$((\boldsymbol{v}, \nabla)\boldsymbol{v})_k = v_j v_{kx_j}, \quad j, k = 1, 2, 3.$

Начальное условие: $\mathrm{v}|_{t=0} = \mathrm{v}^0, \ \operatorname{div} \mathrm{v}^0 = 0.$
$S = \partial D \neq \varnothing \Rightarrow$ граничное условие: $\boldsymbol{v}(x) \parallel S, \ \forall x \in S$ (непроницаемость границы).

Известны локальные теоремы существования гладких и классических решений (Гюнтер, Lichtenstein, 20-е годы 20 века. 70 годы: Kato, Marsden & Ebin – гладкие решения, соболевские пространства, многообразия). **Глобальные** теоремы существования решения в общем случае НЕИЗВЕСТНЫ!

## Глобальная разрешимость или коллапс:

существует ли гладкое начальное поле с компактным носителем на трёхмерном римановом многообразии, такое, что соответствующее решение уравнения Эйлера развивает сингулярность за конечное время?

# Поток. Лагранжева форма уравнений.

$X(t) : a \mapsto X(a,t)$ движение жидкости:
$\partial_t X(a,t) = \mathrm{v}(X(a,t),t), \ X(a,t)|_{t=0} = a;$

## Лагранжева форма уравнений

$X_{tt}(a,t) = -\nabla_x P, \ x = X(a,t) \ \det X'(t) = 1;$

Выводится из принципа наименьшего действия. лагранжиан$\int\limits_D X_t^2(a,t)da = 0.$

## Геодезические на группе $SDiff(D)$

Энергия $\int\limits_D X_t^2(a,t)da$ задаёт правоинвариантную риманову метрику на $SDiff(D) \Rightarrow$ уравнения гидродинамики есть уравнения геодезических.

## Краевая задача для уравнений гидродинамики

Краевые условия $X|_{t=0} = id; \ X|_{t=1} = Y \in SDiff(D);$

Путь кратчайшей длины из $id$ в $Y$ – решение.

# Вихрь

$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathrm{v}$ – вихрь течения; $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

$\boldsymbol{\omega} = (v_{3x_2} - v_{2x_3}, v_{1x_3} - v_{3x_1}, v_{2x_1} - v_{1x_2})$ (декартовы координаты)

Уравнение вихря: $\boldsymbol{\omega}_t = [\mathrm{v}, \boldsymbol{\omega}] = (\boldsymbol{\omega}, \nabla)\mathrm{v} - (\mathrm{v}, \nabla)\boldsymbol{\omega}$

Законы сохранения

вихря: $\boldsymbol{\omega}(x,t) = X'(a,t)\boldsymbol{\omega}^0(a)$, $x = X(a,t)$, $\boldsymbol{\omega}^0 = \mathrm{rot}\,\mathrm{v}^0$;

циркуляций: $\mathrm{v}(x,t)\cdot \mathrm{dx} - \mathrm{v}^0(a)\cdot \mathrm{da} = d\chi$, $x = X(a,t)$

Плоские течения на плоскости $x_3 = 0$: $\mathrm{v} = v_1(x_1, x_2)\mathrm{e}_1 + v_2(x_1, x_2)\mathrm{e}_2$;

Вихрь–скаляр (завихренность): $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathrm{e}_3$; $\omega = v_{2x_1} - v_{1x_2}$;

Уравнение вихря: $\omega_t + \mathrm{v}\cdot\nabla\omega = 0$;

Сохранение вихря: $\omega(X(a,t),t) = \omega^0(a)$, $x = X(a,t)$

Равноизмеримость: $\mathrm{mes}\{x : \omega(x,t) > \alpha\} \equiv \mathrm{const}$

## Необходимое условие коллапса (Beal-Kato-Majda)

$$\int^{t_c} \|\omega(\cdot,t)\|_{\infty,D}\,dt = \infty.$$

# Что со(противо)действует коллапсу?

1. Несжимаемость – противодействует. Пример: $\ddot{X} = 0 \Rightarrow X = a + t\boldsymbol{v}^0(a)$, $\boldsymbol{v}(x,t) = \boldsymbol{v}^0(a)$, $x = X(a,t)$. Несжимаемые движения возможны лишь в том случае, если матрица $\partial v^0/\partial a$ нильпотента. Тогда $(I + \partial v^0/\partial a)^{-1}$ – многочлен от $t$, то есть, решение продолжаемо неограничено по времени.

2. Квадратичная нелинейность – содействует, даже нелокальная. Majda-Fokas et al ввели модельное уравнение $u = uKu$, $u = u(x,t)$, $(x,t) = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ – функция на $\mathbb{R}$, $K$ – гильбертов сингулярный интеграл, и нашли его явные решения, допускающие коллапс.

3. Перенос. Роль сложна. Например, уравнение $u_t + V(u)u_x = 0$ возникновение ударной волны из пика начальной функции при $t > 0$ наблюдается при $V \uparrow$. В проивном случае начальный пик сглаживается. В то же время, рассмотрим перенос несжимаемым полем $U(y)\boldsymbol{e}_1$ пассивной примеси. Распределение примеси будет иметь вид $u(x,y,t) = \psi(x - tU(y), y)$. Производная $u_y$ растёт линейно со временем.

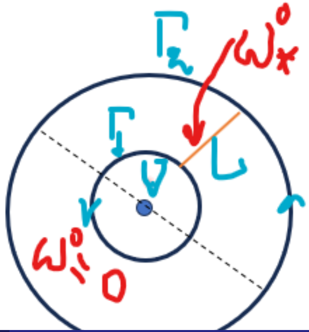
## Потеря гладкости (коллапс за бесконечное время)

Гипотеза Юдовича: в типичном плоском течении (трёхмерном) течении градиент вихря (сам вихрь) растёт неограниченно

# Первоначальные продвижения в проблеме потери гладкости

Юдович построил функционалы Ляпунова для плоских течений с инвариантной прямой и трёхмерных течений с инвариантной плоскостью, содержащей инвариантную прямую, и установил рост градиента вихря в плоском течении и самого вихря в трёхмерном.

Надирашвили установил существование блуждающих решений (в смысле $C^1$-метрики скорости).



# Устойчивость закручивания в плоских потоках

T. Elginldi et al.
Пусть в стационарном потоке все линии тока – нестягиваемые замкнутые кривые, и движение частиц неизохронно. Тогда некоторое пространственно- временное среднее числа оборотов частицы вокруг области мало меняется при малом возмущении.

Возмущение должно быть мало равномерно по времени, но метрика допускает равномерный контроль при обычной нелинейной устойчивости основного потока.

На этой основе установлены:
1. «Старение» лагранжева перемещения;
2. Филаментация и закручивание линий уровня завихренности, феномен блуждания.
3. Рост периметра гладких вихревых пятен.

# Скейлинг-инвариантные решения

T. Elginldi et al.

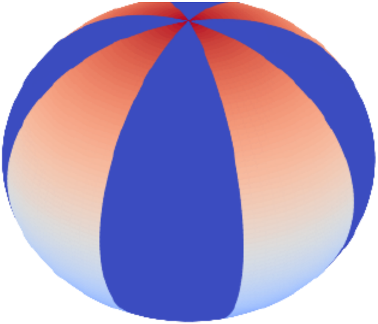
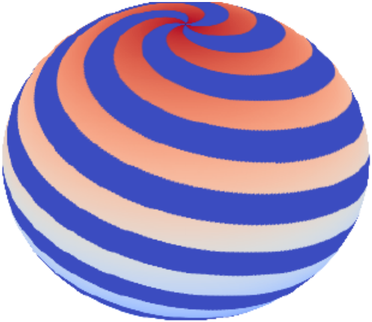
Решение соответствующей системы на окружности стремится при $t \to \pm\infty$ к кусочно-постоянному решению с конечным числом скачков, причём градиент решения растёт неограниченно, даже если число скачков равно нулю. Пределы на $\pm\infty$ не обязаны совпадать.

Задача Коши для уравнения Эйлера в $\mathbb{R}^2$ однозначно разрешима в классе течений с ограниченным и инвариантным относительно поворота на угол $2\pi/m$, $m \geq 3$, вихрем. При этом затухание вихря не предполагается. Локальное описание вращения вокруг центра симметрии даёт некоторое скейлинг-инвариантное решение. При этом, благодаря симметрии, на бесконечности вращения нет

Среди начальных данных с симметрией порядка $m \geq 3$ для уравнения Эйлера в $\mathbb{R}^2$ типичны (образуют множество категории 2) такие, что вихрь решения со временем неограниченно растёт в $\mathrm{C}^1 \cap \mathrm{L}_1$, а дисторсии (производные потока по начальным данным) – в $\mathrm{C}$.

Сказанное верно для уравнений Эйлера на двумерной сфере при $m \geq 4$. Ключевую роль играет то обстоятельство, что скорости вращения вокруг полюсов различны. Соответственно, локальное описание поведения даёт скейлинг-инвариантное решение системы на окружностив прямом и обратном времени.

# Иллюстрация закручивания вихревой структуры на сфере (Elgindi et al, 2022)

# Коллапс классического решения.

Elgindi et al, 2019-2023 Уравнения Эйлера имеют автомодельное осесимметричное решение, где вихрь принадлежит $\mathrm{C}^{\alpha}$, $\alpha < 1/2$ и выражается формулой

$$\frac{F(\frac{x}{(1-t)^{\gamma}})}{1-t}.$$

Соответствующее поле скорости имеет бесконечную энергию.
Функция $F$ не находится явно, её существование доказывается. Сперва рассматривается т.н. фундаментальная модель: $\Omega_t = \Omega K \Omega$, где $K$ – некоторый интегральный оператор на полуцилиндре. Для этой системы автомодельные решения находятся явно.
Следующий шаг – доказательство выживания автомодельного решения при расширении фунд. модели до полного уравнения вихря.
Завершающий шаг – доказательство того, что автомодельный коллапс выживает, когда автомодельное решение деформируется в решение с компактным носителем вихря и конечной энергией скорости.

# Механизм How-Low (гипотетический)

$$\omega_t + \boldsymbol{v}\nabla_{x,z}\omega = -\rho_x, \quad \rho_t + \boldsymbol{v}\nabla_{x,z}\rho = 0.$$